

## Об оптимальном наборе параметров приближенного метода решения стационарных нелинейных уравнений Навье – Стокса с сингулярностью

А. В. РУКАВИШНИКОВ

Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, Хабаровск, Россия

Контактный автор: Рукавишников Алексей Викторович, e-mail: 78321a@mail.ru

Поступила 25 июня 2022 г., доработана 27 июля 2022 г., принята в печать 11 августа 2022 г.

Разработан приближенный метод решения стационарных нелинейных уравнений Навье – Стокса в конвективной форме для многоугольной невыпуклой области. Результаты численных экспериментов показали преимущество предложенного метода над классическими подходами, а именно порядок сходимости приближенного решения к точному решению стационарной нелинейной задачи не зависит от величины входящего угла. Определены оптимальный набор свободных параметров метода и его связь (независимость) с величиной входящего угла.

*Ключевые слова:* нелинейные уравнения Навье – Стокса, сингулярность, метод конечных элементов.

*Цитирование:* Рукавишников А.В. Об оптимальном наборе параметров приближенного метода решения стационарных нелинейных уравнений Навье – Стокса с сингулярностью. Вычислительные технологии. 2022; 27(6):70–87. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.007.

### Введение

Задачи течения вязкой несжимаемой жидкости в невыпуклой многоугольной области  $\Omega$  с входящим углом  $\omega$ ,  $\omega \in (\pi, 2\pi)$  возникают во многих интересных приложениях. Обычно потоки около таких углов меняют свои свойства и поведение из-за резкого изменения геометрии области. Известно, что решение нелинейной задачи Навье – Стокса, описывающее течение несжимаемой вязкой жидкости в расчетной области с входящим углом на ее границе, имеет сингулярные компоненты, даже если входные данные (коэффициенты уравнений, функции правых частей, начальные и граничные условия) гладкие. В случае невыпуклой многоугольной области локальная особенность влечет за собой глобальное ухудшение точности решения. Таким образом, порядок точности классических методов конечных элементов (МКЭ) или конечных разностей (МКР) в невыпуклых многоугольных областях значительно снижается из-за влияния входящего угла, а приближенное решение сходится к точному не быстрее чем  $\mathcal{O}(h^\beta)$ , где показатель  $\beta$  существенно меньше единицы для компонент вектора скоростей жидкости в норме пространства  $W_2^1(\Omega)$  относительно шага сетки  $h$ . При этом погрешность не только концентрируется в небольшой окрестности вершины входящего угла, но и распространяется во внутреннюю часть расчетной области, в которой решение задачи является гладким. Так называемый эффект загрязнения наблюдается в нормах как стандартных пространств Соболева, так и весовых [1].

В решении задач движения жидкости следует отметить современные модификации неконформных МКЭ: разрывный метод Галёркина (DG-метод) и метод виртуальных элементов (VE-метод). Для DG-метода, в отличие от стандартного метода Галёркина, выполняется постановка задачи в ультраслабой форме, а не в слабой. В отличие от классического МКЭ, полученное решение может быть разрывным. DG-метод, как и метод конечных объемов, может обрабатывать вычислительные области сложной геометрии и обладать локальными свойствами устойчивости и сохранения. Отметим работу [2], в которой рассмотрен локальный DG-метод, дающий гибкость в выборе пространств аппроксимации скорости и давления. Экспериментально установлено, что если использовать полиномы степени  $k$  и  $k - 1$  для аппроксимации скорости и давления соответственно, можно получить порядки сходимости, равные  $k + 1$  и  $k$  в норме  $L_2(\Omega)$ . Из-за разрывной природы DG-метод подходит для реализации *hp*-подхода. В частности, для задач с угловой сингулярностью [3] используют геометрическое измельчение сетки в окрестности входящего угла. Дальнейшее развитие подход получил в работах [4–6].

VE-метод [7] основан на идее миметического конечно-разностного метода (см., например, [8]) и дискретизации Галёркина. Избегая явного выражения базисной функции и применяя квадратурную формулу, метод решает задачу построения базисных функций на выпуклых и невыпуклых элементах. Пространство виртуальных элементов содержит стандартное пространство полиномов с добавлением подходящих неполиномиальных функций. Полиномиальное подпространство обеспечивает точное вычисление полиномиальных условий согласованности билинейных функций, а неполиномиальное подпространство — устойчивость метода за счет введения правильных проекций [9–11].

Выделим особые подходы к решению задач движения жидкости в невыпуклых многоугольных областях, основанные:

- на выделении нескольких окрестностей входящего угла и локальной модификации матрицы жесткости для достижения оптимального порядка сходимости [12];
- дополнении пространств конечных элементов сингулярными компонентами [13];
- введении функций, двойственных к сингулярным составляющим решения, и использовании вспомогательных уравнений в слабой постановке задачи [14];
- разделении решения на сингулярные и регулярные части. Приближенное нахождение коэффициентов интенсивности напряжений позволяет определить регулярные составляющие решения [15];
- разбиении области на непересекающиеся подобласти, не содержащие входящих углов (узлы сеток которых не обязательно стыкуются на общих интерфейсах), и численной реализации метода Стрэнга и Фикса, состоящего в том, чтобы увеличивать размерность дискретного пространства скорости сингулярной составляющей решения [16].

В настоящей работе предложена принципиально иная идея. Во-первых, в [17] определено решение (линейной) задачи Стокса как  $R_\nu$ -обобщенное в весовых множествах. Во-вторых, в той же работе для нахождения приближенного  $R_\nu$ -обобщенного решения построен весовой МКЭ. В настоящей статье рассмотрим задачу, которая отличается от задач, представленных в [17, 18], наличием нелинейного конвективного члена  $(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w}$  в уравнениях, выражающих баланс импульса. Хорошо известно [19], что даже если мы рассмотрим эквивалентные формы для уравнений Навье–Стокса: конвективную  $(\text{rot}\mathbf{w}) \times \mathbf{w}$  — вихревую или  $(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w} + \frac{1}{2}(\text{div}\mathbf{w})\mathbf{w}$  — кососимметричную, то они приводят к дискретизации с различными алгоритмическими затратами и точностью ап-

проксимации. Эти различия касаются даже случая выпуклых областей без входящих углов на его границе как для ламинарных, так и для турбулентных течений. Наличие или отсутствие члена  $\alpha \mathbf{w}$  в постановке задачи также меняет стратегию построения метода [20], например, при решении задачи, полученной в результате дискретизации нестационарной задачи по времени, или в случае установившегося течения. В работе реализуем итерационную процедуру Пикара для решения нелинейной задачи Навье–Стокса в конвективной форме, т. е. будем решать последовательность приближенных линейризованных задач с переобуславливанием матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в невыпуклых областях. Экспериментально установим независимость скорости сходимости приближенного решения к точному решению задачи от величины входящего угла. Определим наборы оптимальных свободных параметров предложенного численного метода и их зависимость от его величины.

В [21] для эллиптических краевых задач с особенностью предложено определять решение как  $R_\nu$ -обобщенное. Существование и единственность этого решения в весовых пространствах и множествах доказаны в [22]. Разработан численный метод решения эллиптических краевых задач и получены оценки скорости сходимости [23]. Весовой метод конечных элементов для задачи теории упругости с трещиной предложен в [24]. Тело оптимальных параметров метода для задачи с трещиной описано в [25]. Метод применим и для других задач механики [26].

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 сформулирована задача Навье–Стокса в конвективной форме с угловой особенностью и определено  $R_\nu$ -обобщенное решение для последовательности линейризованных задач. Раздел 2 посвящен построению приближенного метода решения нелинейной задачи с блочным переобуславливанием матриц систем линейных алгебраических уравнений. В разд. 3 представлены и обсуждены результаты численных экспериментов для различных величин входящих углов  $\omega$ .

## 1. Постановка задачи. Определение $R_\nu$ -обобщенного решения

Рассмотрим нелинейную задачу, полученную в результате применения неявной схемы по времени к несжимаемым уравнениям Навье–Стокса в конвективной форме в двумерной области  $\Omega$  евклидова пространства ( $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  — его элемент) с границей  $\partial\Omega$ ,  $\Omega = \Omega \cup \partial\Omega$ : найти вектор скоростей  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$  и кинематическое давление  $q$ , удовлетворяющие системе уравнений и граничным условиям

$$-\mu \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} + \alpha \mathbf{w} + \nabla q = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (3)$$

где  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  и  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  — известные функции правых частей в  $\Omega$  и на  $\partial\Omega$  соответственно,  $\alpha$  — положительный параметр дискретизации,  $\mu = 1/\operatorname{Re}$ ,  $\operatorname{Re}$  — число Рейнольдса.

Поскольку система (1)–(3) нелинейна, ее следует линейризовать. Известно, что если число Рейнольдса и функция  $\mathbf{f}$  не столь велики, то нелинейная задача (1)–(3) имеет единственное решение  $(\mathbf{w}, q)$ . Построим итерационную процедуру Пикара (см., например, [27]) такую, что последовательность решений  $(\mathbf{w}_k, q_k)$  линейных систем

$$-\mu\Delta\mathbf{w}_k + (\mathbf{w}_{k-1} \cdot \nabla)\mathbf{w}_k + \alpha\mathbf{w}_k + \nabla q_k = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{w}_k = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (5)$$

$$\mathbf{w}_k = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (6)$$

$k = 1, 2, \dots$ , сходится к точному решению нелинейной задачи (1)–(3) при  $k \rightarrow \infty$  [27] для произвольного начального приближения  $\mathbf{w}_0$ :  $\operatorname{div}\mathbf{w}_0 = 0$  в  $\Omega$  и  $\mathbf{w}_0 = \boldsymbol{\sigma}$  на  $\partial\Omega$ . Начальное приближение  $q_0$  для давления не задается.

Для того чтобы найти решение нелинейной задачи (1)–(3), необходимо для  $k = 1, 2, \dots$  в (4)–(6) решить систему: найти вектор скоростей  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  и кинематическое давление  $p$ , удовлетворяющие системе уравнений и граничным условиям

$$-\mu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{g}_{k-1} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad (7)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{g}_{k-1}$  — аппроксимация вектора скоростей с предыдущей итерации Пикара,  $\mathbf{g}_{k-1} \in L_\infty(\Omega) \times L_\infty(\Omega)$  и  $\operatorname{div}\mathbf{g}_{k-1} = 0$  в  $\Omega$ .

Особенность численного решения последовательности систем вида (7)–(9) ( $k = 1, 2, \dots$ ), а значит и нелинейной задачи (1)–(3), заключается в том, что область  $\Omega$  представляет собой невыпуклый многоугольник с входящим углом  $\omega$ , т. е. углом больше 180 град. Пусть вершина входящего угла совпадает с началом координат  $\mathcal{O} = (0, 0)$ . Хорошо известно [28], что в случае приближенного решения системы (7)–(9) (и ей подобных) классическими МКР или МКЭ в области с входящим углом  $\omega$  погрешность, возникающая в окрестности его вершины, распространяется во внутреннюю часть расчетной области  $\Omega$ , туда, где решение задачи обладает достаточной гладкостью. Если  $\mathbf{u}_h$  — приближенное решение задачи (7)–(9), то справедлива оценка

$$\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_h)} + h^{-\lambda}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_h)} \leq Ch^\lambda, \quad (10)$$

где  $\lambda < 1$ ,  $C$  — положительная постоянная, не зависящая от  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  и  $h$ . Напомним, что для выпуклых многоугольных областей порядок  $\lambda$  в оценке (10) равен единице, а для невыпуклых многоугольных областей  $\Omega$  с ростом величины угла  $\omega$  порядок сходимости  $\lambda$  становится существенно меньше 1.

Для того чтобы определить  $R_\nu$ -обобщенное решение последовательности задач вида (7)–(9), введем пространства и множества функций. Через  $\Omega^\delta$  обозначим пересечение диска радиуса  $\delta$ ,  $\delta > 0$ , с центром в начале координат  $\mathcal{O} = (0, 0)$  с замыканием области  $\Omega$ . Определим функцию  $\rho(\mathbf{x})$  в  $\bar{\Omega}$ , которую будем называть весовой, удовлетворяющую условиям  $\rho(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , если  $x \in \Omega^\delta$ , и  $\rho(\mathbf{x}) = \delta$  иначе. Пусть  $D^l v(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{l_1} v(\mathbf{x})}{\partial x_1^{l_1}} \frac{\partial^{l_2} v(\mathbf{x})}{\partial x_2^{l_2}}$ ,  $l = (l_1, l_2)$ ,  $|l| = l_1 + l_2$ ,  $l_i$  — неотрицательные целые числа,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$ .

Обозначим через  $L_{2,\beta}(\Omega)$ ,  $W_{2,\beta}^1(\Omega)$  пространства функций  $v(\mathbf{x})$  таких, что

$$\|v\|_{L_{2,\beta}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \rho^{2\beta}(\mathbf{x}) v^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \infty, \quad (11)$$

$$\|v\|_{W_{2,\beta}^1(\Omega)} = \left( \|v\|_{L_{2,\beta}(\Omega)}^2 + \sum_{|l|=1} \int_{\Omega} \rho^{2\beta}(\mathbf{x}) |D^l v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \infty. \quad (12)$$

Определим следующие условия для функций  $v(\mathbf{x})$ :

$$0 < C_1 \leq \|v\|_{L_{2,\beta}(\Omega \setminus \Omega^\delta)}, \quad (13)$$

$$|v(\mathbf{x})| \leq C_2 \delta^{\beta-\varepsilon}(\mathbf{x}) \rho^{\varepsilon-\beta}(\mathbf{x}), \quad |D^1 v(\mathbf{x})| \leq C_2 \delta^{\beta-\varepsilon}(\mathbf{x}) \rho^{\varepsilon-\beta-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^\delta, \quad (14)$$

где  $C_2$  — положительная постоянная, не зависящая от  $v(\mathbf{x})$ ;  $\varepsilon$  — малый положительный параметр, который не зависит от  $\delta$ ,  $\beta$  и  $v(\mathbf{x})$ . Через  $L_{2,\beta}(\Omega, \delta)$  обозначим множество функций  $v(\mathbf{x})$  из пространства  $L_{2,\beta}(\Omega)$ , удовлетворяющих (13) и первому условию (14) с ограниченной нормой (11). Определим подмножество  $Y_\beta(\Omega, \delta) = \{v(\mathbf{x}) \in L_{2,\beta}(\Omega, \delta) : \|\rho^\beta v\|_{L_1(\Omega)} = 0\}$  с ограниченной нормой (11). Пусть  $X_\beta(\Omega, \delta)$  — множество функций  $v(\mathbf{x})$  из пространства  $W_{2,\beta}^1(\Omega)$ , удовлетворяющих (13) и (14) с ограниченной нормой (12). Через  $X_\beta^0(\Omega, \delta)$  обозначим замыкание по норме (12) множества бесконечно дифференцируемых финитных в  $\Omega$  функций, удовлетворяющих условиям (13), (14). Далее определим множество  $Z_\beta(\partial\Omega, \delta) = \{s(\mathbf{x}) : \exists S(\mathbf{x}) \in X_\beta(\Omega, \delta) \text{ и } S(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \text{ на } \partial\Omega\}$  с ограниченной нормой

$$\|s\|_{Z_\beta(\partial\Omega, \delta)} = \inf_{S(\mathbf{x})=s(\mathbf{x}) \text{ на } \partial\Omega} \|S\|_{W_{2,\beta}^1(\Omega)}. \quad (15)$$

Жирным шрифтом выделим множества вектор-функций, т. е.  $\mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega, \delta) = \{\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x})) : v_i(\mathbf{x}) \in L_{2,\beta}(\Omega, \delta)\}$  с ограниченной векторной нормой  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega)} = (\|v_1\|_{L_{2,\beta}(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{L_{2,\beta}(\Omega)}^2)^{1/2}$ . Аналогично введем множества вектор-функций  $\mathbf{X}_\beta(\Omega, \delta)$  ( $\mathbf{X}_\beta^0(\Omega, \delta)$ ) с векторной нормой (12) и  $\mathbf{Z}_\beta(\partial\Omega, \delta)$  с векторной нормой (15).

Полагаем, что вектор-функции правых частей (7) и (9) удовлетворяют условиям

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega, \delta), \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in \mathbf{Z}_\gamma(\partial\Omega, \delta), \quad \gamma > 0. \quad (16)$$

Определим билинейные и линейную формы

$$a_{(k)}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [\mu \nabla \mathbf{z} : \nabla(\rho^{2\nu} \mathbf{v}) + (\mathbf{g}_{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{z} \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) + \alpha \mathbf{z} \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v})] d\mathbf{x}, \quad l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) d\mathbf{x}.$$

$$b_1(\mathbf{v}, s) = - \int_{\Omega} s \operatorname{div}(\rho^{2\nu} \mathbf{v}) d\mathbf{x} = b(\mathbf{v}, s) + c(\mathbf{v}, s), \quad b_2(\mathbf{v}, s) = - \int_{\Omega} (\rho^{2\nu} s) \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = b(\mathbf{v}, s) - c(\mathbf{v}, s),$$

где

$$b(\mathbf{v}, s) = - \int_{\Omega} (\rho^\nu s) \operatorname{div}(\rho^\nu \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad c(\mathbf{v}, s) = - \int_{\Omega} (\rho^\nu s) (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho^\nu) d\mathbf{x}. \quad (17)$$

**Определение 1.**  $R_\nu$ -обобщенным решением задачи (7)–(9) назовем пару  $(\mathbf{u}_\nu, p_\nu) \in \mathbf{X}_\nu(\Omega, \delta) \times Y_\nu(\Omega, \delta)$  (где  $\mathbf{u}_\nu$  удовлетворяет почти всюду (9) на  $\partial\Omega$ ), такую, что для всех пар  $(\mathbf{v}, g) \in \mathbf{X}_\nu^0(\Omega, \delta) \times Y_\nu(\Omega, \delta)$  справедливы интегральные тождества

$$a_{(k)}(\mathbf{u}_\nu, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, p_\nu) = l(\mathbf{v}), \quad (18)$$

$$b_2(\mathbf{u}_\nu, g) = 0. \quad (19)$$

Здесь  $\mathbf{f}$  в  $\Omega$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  на  $\partial\Omega$  — известные функции, которые удовлетворяют (16) при  $\nu \geq \gamma$ .

**Замечание 1.** В [21] доказано, что функция  $\rho^\nu s \in L_{2,0}(\Omega, \delta)$  тогда и только тогда, когда функция  $s \in L_{2,\nu}(\Omega, \delta)$  аналогично  $\rho^\nu s \in X_0(\Omega, \delta) \Leftrightarrow s \in X_\nu(\Omega, \delta)$  и  $\rho^\nu s \in X_0^0(\Omega, \delta) \Leftrightarrow s \in X_\nu^0(\Omega, \delta)$ . Следовательно, билинейная форма  $b(\cdot, \cdot)$ , определенная в (17), является классической билинейной формой для седловых задач (см., например, [29]).

**Замечание 2.** В силу определения функции  $\rho(\mathbf{x}) : c(\mathbf{v}, s) = - \int_{\Omega^\delta} (\rho^\nu s)(\mathbf{v} \cdot \nabla \rho^\nu) dx$ .

Таким образом,  $b_1(\mathbf{v}, s) \neq b_2(\mathbf{v}, s)$  и по отдельности не равны  $b(\mathbf{v}, s)$ .

**Замечание 3** (в случае  $\boldsymbol{\sigma} \equiv 0$ ). По аналогии с [30], используя [31, 32], можно установить следующий факт относительно решения  $(\mathbf{u}_\nu, p_\nu)$  в постановке (18), (19).

**Теорема** (о существовании и единственности  $R_\nu$ -обобщенного решения). Пусть для  $\nu > 0$  справедливы следующие утверждения:

1. Билинейные формы  $a_{(k)}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ ,  $b_1(\mathbf{v}, s)$ ,  $b_2(\mathbf{w}, q)$  и линейная форма  $l(\mathbf{v})$  непрерывны для произвольных функций  $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}_\nu^0(\Omega, \delta)$ ,  $s, q \in Y_\nu(\Omega, \delta)$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega, \delta)$ ,  $\nu \geq \gamma \geq 0$ .
2. Существует параметр  $\delta_1 > 0$ , такой, что для произвольных  $\delta \in (0, \delta_1)$  выполняются неравенства

$$\forall s \in Y_\nu(\Omega, \delta) : \sup_{\mathbf{x}_\nu^0(\Omega, \delta)} \frac{b_1(\mathbf{v}, s)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)} \cdot \|s\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}} \geq \beta_1 > 0,$$

$$\forall q \in Y_\nu(\Omega, \delta) : \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{X}_\nu^0(\Omega, \delta)} \frac{b_2(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)} \cdot \|q\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}} \geq \beta_2 > 0,$$

$$\forall \mathbf{w} \in K_2 : \sup_{\mathbf{v} \in K_1} \frac{a_{(k)}(\mathbf{w}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)}} \geq \alpha \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in K_1 : \sup_{\mathbf{w} \in K_2} \frac{a_{(k)}(\mathbf{w}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)}} \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)},$$

$K_1 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_\nu^0(\Omega, \delta) : b_1(\mathbf{v}, s) = 0 \forall s \in Y_\nu(\Omega, \delta)\}$ .  $K_2 = \{\mathbf{w} \in \mathbf{X}_\nu^0(\Omega, \delta) : b_2(\mathbf{w}, q) = 0 \forall q \in Y_\nu(\Omega, \delta)\}$ . Тогда для  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega, \delta)$  существует единственное  $R_\nu$ -обобщенное решение  $(\mathbf{u}_\nu, p_\nu) \in \mathbf{X}_\nu^0(\Omega, \delta) \times Y_\nu(\Omega, \delta)$  задачи (7)–(9) в постановке (18), (19).

## 2. Построение приближенного метода решения задачи

Выполним квазиравномерную [33] триангуляцию  $\Lambda_h$  области  $\bar{\Omega}$ , т. е. разобьем область на треугольники  $K_j$  со стороной порядка  $h$ , которые назовем базовыми элементами. Вершины базового элемента соединим с его центром тяжести. Таким образом, разделим элемент  $K_j$  на три треугольника  $L_{j_s}$ , которые назовем конечными элементами, их множество образует триангуляцию  $T_h$  и  $\Omega_h = \bigcup_{L_{j_s} \in T_h} L_{j_s}$ . Определим совокупности узлов

для компонент вектора скоростей и функции давления и введем для них конечномерные пространства.

Для компонент вектора скоростей в качестве аппроксимационных узлов возьмем вершины и середины сторон  $L_{j_s}$ . Используя выбранные узлы, определим базисные функции  $\theta_{(n)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in L_{j_s}$ , которые являются многочленами второй степени. Полагаем, что совпадающие узлы соседних элементов общие. Следовательно, функции в представленном базисе будут непрерывны в  $\bar{\Omega}$ . Обозначим пространство функций через  $V_h$ , а пространство вектор-функций — через  $\mathbf{V}_h = V_h \times V_h$ . Пространство  $\mathbf{V}_h$  совпадает с пространством  $\mathbf{P}_2$  хорошо известной пары Тейлора – Худа  $\mathbf{P}_2$ – $P_1$  [29].

Для функции давления в качестве аппроксимационных узлов возьмем вершины  $L_{j_s}$ . Используя их, определим базисные функции  $\chi_{(l)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in L_{j_s}$ , которые являются полиномами первой степени. Полагаем, что совпадающие узлы двух (и более) соседних конечных элементов — разные узлы. Функции, представленные в базисе, будут разрывными и лишь принадлежать пространству  $L_2(\Omega)$ . Обозначим пространство функций через  $W_h$ . Пространство  $W_h$  отличается от непрерывного пространства  $P_1$ , пары Тейлора – Худа  $\mathbf{P}_2$ – $P_1$ , его размерность существенно больше размерности пространства  $P_1$ .

Платой за это неудобство служит тот факт, что для любой  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$  существует такая  $s_h \in W_h$ , что  $s_h = \operatorname{div} \mathbf{v}_h$ , и из условия  $\int_{\Omega} (\rho^{2\nu} s_h) \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} = 0$  следует  $\|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_{L_{2,\nu}(\Omega)} = 0$ .

Для функций пространств  $\mathbf{V}_h$ – $W_h$  справедливо условие *inf-sup* [34].

Усовершенствуем функции  $\theta_{(n)}(\mathbf{x})$  и  $\chi_{(l)}(\mathbf{x})$ . Умножим их на  $\rho(\mathbf{x})$  в некоторой степени

$$\varphi_{(n)}(\mathbf{x}) = \rho^{\nu^\diamond}(\mathbf{x})\theta_{(n)}(\mathbf{x}), \quad \psi_{(l)}(\mathbf{x}) = \rho^{\mu^\diamond}(\mathbf{x})\chi_{(l)}(\mathbf{x}), \quad (20)$$

где  $\nu^\diamond, \mu^\diamond$  — действительные числа, которые являются свободными параметрами метода. Как и в [35], оптимальная погрешность метода достигается, когда  $\nu^\diamond = \mu^\diamond$ .

Определим пространство  $X_h$  для компонент скорости  $\mathbf{u}_{h,\nu}(\mathbf{x}) = (u_{h,\nu,1}(\mathbf{x}), u_{h,\nu,2}(\mathbf{x}))$ :

$$u_{h,\nu,1}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\dim V_h} \hat{c}_i \varphi_{(i)}(\mathbf{x}), \quad u_{h,\nu,2}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\dim V_h} \hat{d}_i \varphi_{(i)}(\mathbf{x}), \quad (21)$$

где  $\varphi_{(i)}(\mathbf{x})$  — базисные функции (см. (20)),  $\hat{c}_i = \rho^{-\nu^\diamond}(M_i)c_i$  и  $\hat{d}_i = \rho^{-\nu^\diamond}(M_i)d_i$  — коэффициенты,  $M_i$  — узлы пространства  $V_h$  в  $\Omega$ . Пусть  $X_h^0 = \{v_h \in X_h : v_h(M_i) = 0, M_i \in \partial\Omega\}$ .

Введем пространство  $Y_h$  для давления  $p_{h,\nu}(\mathbf{x})$ :

$$p_{h,\nu}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\dim W_h} \hat{e}_j \psi_{(j)}(\mathbf{x}), \quad (22)$$

где  $\psi_{(j)}(\mathbf{x})$  — базисные функции (см. (20));  $\hat{e}_j = \rho^{-\mu^\diamond}(N_j)e_j$  — коэффициент;  $N_j$  — узлы аппроксимации пространства  $W_h$ . При этом  $\mathbf{X}_h = X_h \times X_h \subset \mathbf{X}_\nu(\Omega, \delta)$ ,  $\mathbf{X}_h^0 = X_h^0 \times X_h^0 \subset \mathbf{X}_\nu^0(\Omega, \delta)$  и  $Y_h \subset Y_\nu(\Omega, \delta)$ .

**Определение 2.** Приближенным  $R_\nu$ -обобщенным решением задачи (7)–(9) назовем пару функций  $(\mathbf{u}_{h,\nu}, p_{h,\nu}) \in \mathbf{X}_h(\Omega, \delta) \times Y_h(\Omega, \delta)$  (где  $\mathbf{u}_{h,\nu}$  удовлетворяет условию (9) в узлах на  $\partial\Omega$ ), такую, что для всех пар  $(\mathbf{v}_h, g_h) \in \mathbf{X}_h^0 \times Y_h$  справедливы тождества

$$a_{(k)}(\mathbf{u}_{h,\nu}, \mathbf{v}_h) + b_1(\mathbf{v}_h, p_{h,\nu}) = l(\mathbf{v}_h), \quad (23)$$

$$b_2(\mathbf{u}_{h,\nu}, g_h) = 0. \quad (24)$$

Здесь  $\mathbf{f}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  подчиняются условиям (16),  $\nu \geq \gamma$ .

Для того чтобы найти приближенное решение задачи (7)–(9) в постановке (23), (24), необходимо решить СЛАУ вида

$$\mathbf{A}_{(k)}\mathbf{y} + \mathbf{B}_1\mathbf{z} = \mathbf{F}, \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_2^T\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (26)$$

здесь  $\mathbf{y} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{\dim V_h}, \hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots, \hat{d}_{\dim V_h})^T$ ,  $\mathbf{z} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_{\dim W_h})^T$  и  $\mathbf{F}$  — вектор-столбец размерности  $2 \times \dim V_h$  значений линейной формы  $l(\varphi_{(i)})$ .

**Замечание 4.** Решив систему уравнений (25), (26), найдем неизвестные  $\hat{c}_i$ ,  $\hat{d}_i$  и  $\hat{e}_j$ . Затем по обратным формулам (см. (21), (22)) ( $c_i = \rho^{\nu^\diamond}(M_i)\hat{c}_i$ ,  $d_i = \rho^{\nu^\diamond}(M_i)\hat{d}_i$  и  $e_j = \rho^{\mu^\diamond}(N_j)\hat{e}_j$ ) вычислим значения в узлах аппроксимации  $M_i$  и  $N_j$  соответственно.

Для нахождения решения  $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  системы уравнений (25), (26) при фиксированном  $k$  применим сходящуюся неполную итерационную процедуру Удзавы [36] с блочным

переобусловливанием матрицы системы. Процедуру представим в виде алгоритма 1, этапы которого реализуем с помощью вспомогательных алгоритмов 2 и 3.

**Алгоритм 1.**

*Этап 1.* Пусть приближение  $(\boldsymbol{\chi}^0, \boldsymbol{\xi}^0)$  удовлетворяет (25), (26).

*Этап 2.* Вычислим вектор

$$\tilde{\mathbf{r}}^l = \mathbf{F} - \mathbf{A}_{(k)}\boldsymbol{\chi}^l - \mathbf{B}_1\boldsymbol{\xi}^l, \quad (27)$$

найдем приближение

$$\boldsymbol{\chi}^{l+1} = \boldsymbol{\chi}^l + \mathbf{r}^l, \quad (28)$$

применяя обобщенный метод минимальных невязок (GMRES-метод) с переобусловливателем  $\hat{\mathbf{A}}_{(k)}$  к матрице  $\mathbf{A}_{(k)}$ . Вектор  $\mathbf{r}^l$  в (28) определим с помощью алгоритма 2.

*Этап 3.* Вычислим вектор

$$\tilde{\mathbf{d}}^l = \mathbf{B}_2^T \boldsymbol{\chi}^l, \quad (29)$$

найдем приближение

$$\boldsymbol{\xi}^{l+1} = \boldsymbol{\xi}^l + \mathbf{d}^l. \quad (30)$$

Вектор  $\mathbf{d}^l = \hat{\mathbf{S}}_{(k)}^{-1} \tilde{\mathbf{d}}^l$  в (30) вычислен при использовании вектора  $\tilde{\mathbf{d}}^l$  из (29) при помощи алгоритма 3, на каждой внутренней итерации процедуры использован GMRES-метод, а для переобусловливателя  $\hat{\mathbf{S}}_{(k)}$  к  $\mathbf{S}_{(k)} = \mathbf{B}_2^T \mathbf{A}_{(k)}^{-1} \mathbf{B}_1$  построена вспомогательная матрица  $\hat{\mathbf{S}}_{(k)}^0$ .

*Этап 4.* Проверим, выполнено ли условие остановки. Если выполнено, значит, найдено решение  $(\boldsymbol{\chi}^{L_k}, \boldsymbol{\xi}^{L_k})$ . Иначе переходим к этапу 2.

**Алгоритм 2.** Переобусловливающая матрица  $\hat{\mathbf{A}}_{(k)}$  к  $\mathbf{A}_{(k)}$  получена неполным разложением на нижне-  $\hat{\mathbf{L}}_{(k)}$  и верхнетреугольную  $\hat{\mathbf{U}}_{(k)}$  матрицы [37]:  $\hat{\mathbf{A}}_{(k)} = \hat{\mathbf{L}}_{(k)} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{(k)}$ ,  $\hat{\mathbf{A}}_{(k)}^{-1} = \hat{\mathbf{U}}_{(k)}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{L}}_{(k)}^{-1}$ . Пусть  $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{A}}_{(k)}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}^l$ , где  $\tilde{\mathbf{r}}^l$  вычислен в (27), тогда процедура Арнольди [37] порождает ортогональный базис с переобусловленным слева подпространством Крылова размерности  $s$ :  $\mathbf{r}^l = \sum_{i=0}^{s-1} \beta_i \left( \hat{\mathbf{A}}_{(k)}^{-1} \mathbf{A}_{(k)} \right)^i \mathbf{q}$ ,  $\beta_i \in \mathbf{R}$ ,  $s = 5$ .

**Алгоритм 3.** Требуется вычислить вектор  $\hat{\mathbf{S}}_{(k)}^{-1} \tilde{\mathbf{d}}^l$ , но нахождение обратной матрицы к  $\hat{\mathbf{S}}_{(k)}$  затруднительно. Легче умножить вспомогательную к ней матрицу  $\mathbf{S}_{(k)}^0$  на вектор:

$$(\mathbf{S}_{(k)}^0)_{ij} = \frac{1}{\mu} \int_{\Delta_{ij}} \rho^{2\nu+2\mu^\circ} \chi_{(i)}(\mathbf{x}) \chi_{(j)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \text{ где } \Delta_{ij} = \text{supp}\{\chi_{(i)}(\mathbf{x})\} \cap \text{supp}\{\chi_{(j)}(\mathbf{x})\} \cap \Omega \text{ и } \chi_{(i)}(\mathbf{x}),$$

$\chi_{(j)}(\mathbf{x})$  — базисные функции пространства  $W_h$ . Через  $\tilde{\mathbf{S}}_{(k)}$  обозначим диагональную матрицу, элементы которой имеют вид  $\left( \tilde{\mathbf{S}}_{(k)} \right)_{ii} = \sum_{j=1}^{\dim W_h} \left( \mathbf{S}_{(k)}^0 \right)_{ij}$ . Организуем процедуру, на

каждой итерации которой, применяя GMRES-метод, найдем вектор по аналогии с  $\mathbf{r}^l$  алгоритма 2:

1. Пусть  $\mathbf{e}^0$  — начальное приближение,  $\mathbf{e}^0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ .
2. Для  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  вычисляем  $\mathbf{e}^{n+1} = \mathbf{e}^n + \tilde{\mathbf{S}}_{(k)}^{-1} (\tilde{\mathbf{d}}^l - \mathbf{S}_{(k)}^0 \mathbf{e}^n)$ .
3. Вектор  $\mathbf{e}^N$  и есть необходимый вектор  $\mathbf{d}^l$  в (30).

Используя алгоритм 4, найдем значения приближенного решения нелинейной задачи (1)–(3) в узлах сетки, а следовательно, вектор-функцию скорости и скалярную функцию давления, которые обозначим через  $\mathbf{w}_{h,\nu}$  и  $q_{h,\nu}$  соответственно.



**Алгоритм 4.**

*Этап 1.* Пусть вектор  $\mathbf{y}_0$  — начальное приближение, удовлетворяющее условиям (2) и (3) в узлах  $M_i$  в  $\Omega$  и на  $\partial\Omega$  соответственно. Не ограничивая общности, полагаем, что  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$  в узлах  $M_i$  и  $N_j$  в  $\Omega$  соответственно.

*Этап 2.* Реализуем итерационную процедуру Пикара,  $k = 1, 2, \dots$

1. Обозначим через  $(\chi^0, \xi^0)$  пару векторов  $(\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{z}_{k-1})$ .
2. Выполним алгоритм 1.
3. Обозначим через  $(\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k)$  полученную в результате применения алгоритма 1 пару векторов  $(\chi^{L_k}, \xi^{L_k})$ .

*Этап 3.* Если условие остановки выполнено, значит, найдено искомое решение. Иначе переходим к этапу 2 алгоритма.

**Замечание 5.** Если  $\nu = \nu^\diamond = \mu^\diamond = 0$ , значит, имеем последовательность решений (23), (24) по классическому МКЭ. Получим их результирующую пару  $(\mathbf{w}_h, q_h)$ .

**3. Результаты численных экспериментов**

Представим результаты численных экспериментов нахождения приближенного решения по весовому МКЭ нелинейной задачи (1)–(3) в конвективной форме для различных невыпуклых многоугольных областей  $\Omega_m$  вида  $(-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \bar{J}_m$  с одним входящим углом  $\omega$ , принимающим значение  $\omega_m$  больше  $\pi$  на границе с вершиной в начале координат. Сравним порядок сходимости метода с соответствующим классическим МКЭ ( $\nu = \nu^\diamond = \mu^\diamond = 0$ ). Угол  $\omega$  в тестовых примерах будет принимать значения  $\omega_m = \left(1 + \frac{1}{2m}\right)\pi$ , а области  $\bar{J}_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ , для каждого из них имеют вид  $\bar{J}_1 = \{(x_1, x_2) : -1 < x_1 < 0, -1 < x_2 < 0\}$ ,  $\bar{J}_2 = \{(x_1, x_2) : -1 < x_1 < 0, -1 < x_2 < x_1\}$ ,  $\bar{J}_3 = \{(x_1, x_2) : -1 < x_1 < 0, -1 < x_2 < x_1/2\}$ .

В тестовых примерах точное решение нелинейной задачи (1)–(3) в полярных координатах  $(r, \varphi)$  зависит от величины входящего угла  $\omega_m$  и имеет вид

$$w_1(r, \varphi) = r^{\lambda_m} \theta_1(\varphi), \quad w_2(r, \varphi) = r^{\lambda_m} \theta_2(\varphi), \quad q(r, \varphi) = r^{\lambda_m - 1} \theta_3(\varphi), \quad (31)$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1(\varphi) \\ \theta_2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_m + 1)\Lambda_m(\varphi) & \Lambda'_m(\varphi) \\ \Lambda'_m(\varphi) & -(\lambda_m + 1)\Lambda_m(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\theta_3(\varphi) = \frac{1}{\lambda_m - 1} \left( (\lambda_m + 1)^2 \Lambda'_m(\varphi) + \Lambda'''_m(\varphi) \right), \quad m = 1, 2, 3. \quad (33)$$

Вспомогательная функция  $\Lambda_m(\varphi)$  в (32), (33) имеет вид

$$\Lambda_m(\varphi) = \cos((\lambda_m - 1)\varphi) - \cos((\lambda_m + 1)\varphi) + \cos(\lambda_m \omega_m) \left( \frac{\sin((\lambda_m + 1)\varphi)}{\lambda_m + 1} - \frac{\sin((\lambda_m - 1)\varphi)}{\lambda_m - 1} \right).$$

$\Lambda'_m(\varphi)$  и  $\Lambda'''_m(\varphi)$  — первая и третья производные функции  $\Lambda_m(\varphi)$  по  $\varphi$ ;  $\lambda_m$  — наименьшее положительное число, являющееся решением уравнения  $\lambda \sin \omega_m = -\sin(\lambda \omega_m)$ .

Выпишем приближенные значения величин  $\lambda_m$  для соответствующих величин  $\omega_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ , входящего угла  $\omega$ :  $\omega_1 = 1.5\pi - \lambda_1 \approx 0.54448$ ,  $\omega_2 = 1.25\pi - \lambda_2 \approx 0.67358$  и  $\omega_3 = 1.125\pi - \lambda_3 \approx 0.80077$ . Решение  $(\mathbf{w}, q)$  аналитично в  $\bar{\Omega}_m \setminus (0, 0)$ , но  $\mathbf{w} \notin \mathbf{W}_2^2(\Omega_m)$  и  $q \notin W_2^1(\Omega_m)$ . При этом погрешность вектор-функции скорости, возникающая в окрестности вершины входящего угла, при использовании классического МКЭ распространяется во внутреннюю часть расчетной области. Порядок сходимости приближенного

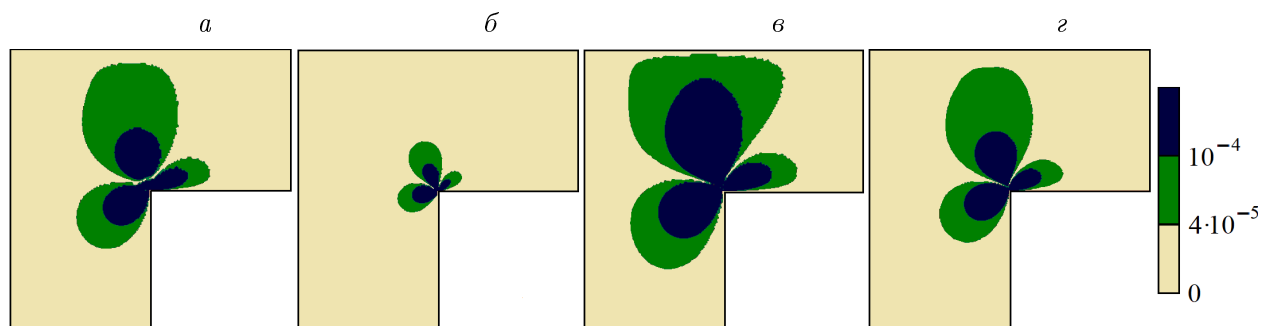


Рис. 1. Модуль разности между точным и приближенным решениями (1)–(3)  $\omega = 1.5\pi$ :  $a$  и  $б$  соответственно  $h = 0.01$  и  $h = 0.005$  ( $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 1.27 \cdot 10^{-2}$ ,  $\nu^\diamond = -0.275$ ), весовой МКЭ;  $в$  и  $г$  соответственно  $h = 0.01$  и  $h = 0.005$ , классический МКЭ

Fig. 1. Modulus of the difference between exact and approximate solutions (1)–(3)  $\omega = 1.5\pi$ :  $a$  and  $б$  respectively  $h = 0.01$  and  $h = 0.005$  ( $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 1.27 \cdot 10^{-2}$ ,  $\nu^\diamond = -0.275$ ), weighted FEM;  $в$  and  $г$  respectively  $h = 0.01$  and  $h = 0.005$ , classical FEM

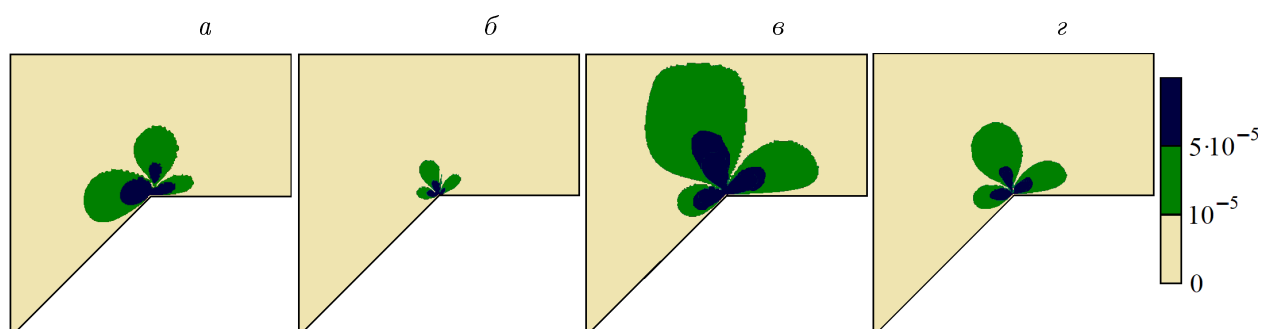


Рис. 2. Модуль разности между точным и приближенным решениями (1)–(3)  $\omega = 1.25\pi$ :  $a$  и  $б$  соответственно  $h = 0.01$  и  $h = 0.005$  ( $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 1.24 \cdot 10^{-2}$ ,  $\nu^\diamond = -0.15$ ), весовой МКЭ;  $в$  и  $г$  соответственно  $h = 0.01$  и  $h = 0.005$ , классический МКЭ

Fig. 2. Modulus of the difference between exact and approximate solutions (1)–(3) in a  $\omega = 1.25\pi$ :  $a$  and  $б$  respectively  $h = 0.01$  and  $h = 0.005$  ( $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 1.24 \cdot 10^{-2}$ ,  $\nu^\diamond = -0.15$ ), weighted FEM;  $в$  and  $г$  respectively  $h = 0.01$  and  $h = 0.005$ , classical FEM

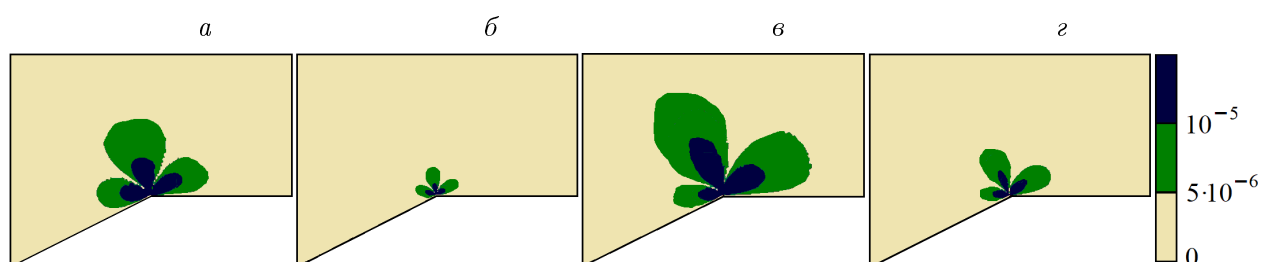


Рис. 3. Модуль разности между точным и приближенным решениями (1)–(3)  $\omega = 1.125\pi$ :  $a$  и  $б$  соответственно  $h = 0.01$  и  $h = 0.005$  ( $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 1.27 \cdot 10^{-2}$ ,  $\nu^\diamond = -0.025$ ), весовой МКЭ;  $в$  и  $г$  соответственно  $h = 0.01$  и  $h = 0.005$ , классический МКЭ

Fig. 3. Modulus of the difference between exact and approximate solutions of the problem (1)–(3)  $\omega = 1.125\pi$ :  $a$  and  $б$  respectively  $h = 0.01$  and  $h = 0.005$  ( $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 1.27 \cdot 10^{-2}$ ,  $\nu^\diamond = -0.025$ ), weighted FEM;  $в$  and  $г$  respectively  $h = 0.01$  and  $h = 0.005$ , classical FEM

Т а б л и ц а 1. Разность между приближенным по классическому МКЭ и точным решениями (1)–(3) в норме  $\mathbf{W}_2^1(\Omega_m)$  в зависимости от  $h$  и  $\omega_m$ ,  $m = 1, 2, 3$

Table 1. Difference between the standard approximate FEM and the exact solutions (1)–(3) in the norm  $\mathbf{W}_2^1(\Omega_m)$  depending on  $h$  and  $\omega_m$ ,  $m = 1, 2, 3$

$h$	$\omega_1 = 1.5\pi$	$\Delta_1$	$\omega_2 = 1.25\pi$	$\Delta_2$	$\omega_3 = 1.125\pi$	$\Delta_3$
0.01	$2.063 \cdot 10^{-1}$	–	$1.004 \cdot 10^{-1}$	–	$3.615 \cdot 10^{-2}$	–
0.005	$1.429 \cdot 10^{-1}$	0.53	$6.309 \cdot 10^{-2}$	0.67	$2.074 \cdot 10^{-2}$	0.802
0.0025	$9.806 \cdot 10^{-2}$	0.543	$3.957 \cdot 10^{-2}$	0.673	$1.19 \cdot 10^{-2}$	0.801

Т а б л и ц а 2. Разность между приближенным по весовому МКЭ и точным решениями (1)–(3) в норме  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_m)$  в зависимости от  $h$  и  $\nu^\diamond$ ;  $\omega_1 = 1.5\pi$

Table 2. Difference between an approximate by weighted FEM and an exact solutions (1)–(3) in the norm  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_m)$  depending on  $h$  and  $\nu^\diamond$ ;  $\omega_1 = 1.5\pi$

$\delta$	$\nu$	$h$	$\nu^\diamond = -0.425$	$\Delta_1$	$\nu^\diamond = -0.35$	$\Delta_1$	$\nu^\diamond = -0.275$	$\Delta_1$
$1.24 \cdot 10^{-2}$	1.8	0.01	$4.211 \cdot 10^{-5}$	–	$3.223 \cdot 10^{-5}$	–	$2.735 \cdot 10^{-5}$	–
		0.005	$2.107 \cdot 10^{-5}$	0.999	$1.618 \cdot 10^{-5}$	0.993	$1.371 \cdot 10^{-5}$	0.996
		0.0025	$1.046 \cdot 10^{-5}$	1.01	$8.049 \cdot 10^{-6}$	1.007	$6.817 \cdot 10^{-6}$	1.008
$\delta$	$\nu$	$h$	$\nu^\diamond = -0.4$	$\Delta_1$	$\nu^\diamond = -0.325$	$\Delta_1$	$\nu^\diamond = -0.25$	$\Delta_1$
$1.27 \cdot 10^{-2}$	2.0	0.01	$1.714 \cdot 10^{-5}$	–	$1.31 \cdot 10^{-5}$	–	$1.169 \cdot 10^{-5}$	–
		0.005	$8.517 \cdot 10^{-6}$	1.011	$6.572 \cdot 10^{-6}$	0.995	$5.859 \cdot 10^{-6}$	0.996
		0.0025	$4.233 \cdot 10^{-6}$	1.009	$3.269 \cdot 10^{-6}$	1.007	$2.912 \cdot 10^{-6}$	1.009

Т а б л и ц а 3. Разность между приближенным по весовому МКЭ и точным решениями (1)–(3) в норме  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_m)$  в зависимости от  $h$  и  $\nu^\diamond$ ;  $\omega_2 = 1.25\pi$

Table 3. Difference between an approximate by weighted FEM and an exact solutions (1)–(3) in the norm  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_m)$  depending on  $h$  and  $\nu^\diamond$ ;  $\omega_2 = 1.25\pi$

$\delta$	$\nu$	$h$	$\nu^\diamond = -0.325$	$\Delta_2$	$\nu^\diamond = -0.275$	$\Delta_2$	$\nu^\diamond = -0.225$	$\Delta_2$
$1.24 \cdot 10^{-2}$	1.8	0.01	$2.273 \cdot 10^{-5}$	–	$1.917 \cdot 10^{-5}$	–	$1.635 \cdot 10^{-5}$	–
		0.005	$1.139 \cdot 10^{-5}$	0.996	$9.576 \cdot 10^{-6}$	1.001	$8.149 \cdot 10^{-6}$	1.004
		0.0025	$5.653 \cdot 10^{-6}$	1.01	$4.744 \cdot 10^{-6}$	1.014	$4.105 \cdot 10^{-6}$	0.989
$\delta$	$\nu$	$h$	$\nu^\diamond = -0.3$	$\Delta_2$	$\nu^\diamond = -0.25$	$\Delta_1$	$\nu^\diamond = -0.2$	$\Delta_2$
$1.27 \cdot 10^{-2}$	2.0	0.01	$9.631 \cdot 10^{-6}$	–	$7.851 \cdot 10^{-6}$	–	$6.865 \cdot 10^{-6}$	–
		0.005	$4.8 \cdot 10^{-6}$	1.004	$3.975 \cdot 10^{-6}$	0.982	$3.399 \cdot 10^{-6}$	1.014
		0.0025	$2.418 \cdot 10^{-6}$	0.989	$1.957 \cdot 10^{-6}$	1.022	$1.676 \cdot 10^{-6}$	1.02

Т а б л и ц а 4. Разность между приближенным по весовому МКЭ и точным решениями (1)–(3) в норме  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_m)$  в зависимости от  $h$  и  $\nu^\diamond$ ;  $\omega_3 = 1.125\pi$

Table 4. Difference between an approximate by weighted FEM and an exact solutions (1)–(3) in the norm  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_m)$  depending on  $h$  and  $\nu^\diamond$ ;  $\omega_3 = 1.125\pi$

$\delta$	$\nu$	$h$	$\nu^\diamond = -0.225$	$\Delta_3$	$\nu^\diamond = -0.2$	$\Delta_3$	$\nu^\diamond = -0.175$	$\Delta_1$
$1.24 \cdot 10^{-2}$	1.8	0.01	$1.222 \cdot 10^{-5}$	–	$1.094 \cdot 10^{-5}$	–	$9.898 \cdot 10^{-6}$	–
		0.005	$6.11 \cdot 10^{-6}$	1.0	$5.486 \cdot 10^{-6}$	0.996	$5.003 \cdot 10^{-6}$	0.984
		0.0025	$3.046 \cdot 10^{-6}$	1.004	$2.725 \cdot 10^{-6}$	1.009	$2.482 \cdot 10^{-6}$	1.011
$\delta$	$\nu$	$h$	$\nu^\diamond = -0.2$	$\Delta_3$	$\nu^\diamond = -0.175$	$\Delta_3$	$\nu^\diamond = -0.15$	$\Delta_3$
$1.27 \cdot 10^{-2}$	2.0	0.01	$4.682 \cdot 10^{-6}$	–	$4.218 \cdot 10^{-6}$	–	$3.786 \cdot 10^{-6}$	–
		0.005	$2.325 \cdot 10^{-6}$	1.009	$2.108 \cdot 10^{-6}$	1.001	$1.884 \cdot 10^{-6}$	1.007
		0.0025	$1.157 \cdot 10^{-6}$	1.006	$1.049 \cdot 10^{-6}$	1.006	$9.472 \cdot 10^{-7}$	0.992

Т а б л и ц а 5. Доля узлов стандартного МКЭ, погрешность в которых не превосходит  $\Xi_n$   
 Table 5. The proportion of nodes of the standard FEM, the error in which does not exceed  $\Xi_n$

$\omega_m$	$\Xi_n$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$h = 0.0025$
1.5 $\pi$	$1 \cdot 10^{-6}$	$7.19 \cdot 10^{-2}$	$1.136 \cdot 10^{-1}$	$1.784 \cdot 10^{-1}$
	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$1.234 \cdot 10^{-1}$	$1.951 \cdot 10^{-1}$	$3.079 \cdot 10^{-1}$
1.25 $\pi$	$5 \cdot 10^{-7}$	$1.001 \cdot 10^{-1}$	$3.22 \cdot 10^{-1}$	$4.722 \cdot 10^{-1}$
	$1 \cdot 10^{-6}$	$2.002 \cdot 10^{-1}$	$4.199 \cdot 10^{-1}$	$6.071 \cdot 10^{-1}$
1.125 $\pi$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$1.162 \cdot 10^{-1}$	$3.461 \cdot 10^{-1}$	$5.703 \cdot 10^{-1}$
	$5 \cdot 10^{-7}$	$2.149 \cdot 10^{-1}$	$5.755 \cdot 10^{-1}$	$8.315 \cdot 10^{-1}$

Т а б л и ц а 6. Доля узлов весового МКЭ, погрешность в которых не превосходит  $\Xi_n$   
 Table 6. The proportion of nodes of the weighted FEM, the error in which does not exceed  $\Xi_n$

$\omega_m$	$\nu$	$\delta$	$\nu^\diamond$	$\Xi_n$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$h = 0.0025$
1.5 $\pi$	2.0	1.27 $\cdot 10^{-2}$	-0.275	$1 \cdot 10^{-6}$	$1.038 \cdot 10^{-1}$	$2.447 \cdot 10^{-1}$	$4.608 \cdot 10^{-1}$
				$2.5 \cdot 10^{-6}$	$1.786 \cdot 10^{-1}$	$4.255 \cdot 10^{-1}$	$6.955 \cdot 10^{-1}$
1.25 $\pi$	2.0	1.24 $\cdot 10^{-2}$	-0.15	$5 \cdot 10^{-7}$	$1.76 \cdot 10^{-1}$	$3.99 \cdot 10^{-1}$	$7.614 \cdot 10^{-1}$
				$1 \cdot 10^{-6}$	$2.764 \cdot 10^{-1}$	$5.98 \cdot 10^{-1}$	$9.031 \cdot 10^{-1}$
1.125 $\pi$	2.0	1.27 $\cdot 10^{-2}$	-0.025	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$2.077 \cdot 10^{-1}$	$4.35 \cdot 10^{-1}$	$7.749 \cdot 10^{-1}$
				$5 \cdot 10^{-7}$	$2.911 \cdot 10^{-1}$	$6.943 \cdot 10^{-1}$	$9.367 \cdot 10^{-1}$

решения к точному решению задачи существенно понижается с ростом величины входящего угла  $\omega$ . Пусть  $h$  — шаг квазиравномерной сетки. Если  $\omega = 1.125\pi$ , то порядок сходимости равен  $\mathcal{O}(h^{0.8})$ , если  $\omega = 1.25\pi$ , то —  $\mathcal{O}(h^{0.67})$ , и если  $\omega = 1.5\pi$ , то —  $\mathcal{O}(h^{0.54})$  в норме пространства  $\mathbf{W}_2^1(\Omega_m)$  (табл. 1).

В табл. 1–4 величина  $\Delta_m$  является показателем числа 2 отношения погрешностей с шагом  $2h$  и  $h$ , она показывает порядок сходимости по  $h$  для угла  $\omega$ , принимающего значение  $\omega_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ . Обозначим через  $d_i^G(M_j) = |w_{h,i}(M_j) - w_i(M_j)|$  и  $d_i^{R\nu}(M_j) = |w_{h,\nu,i}(M_j) - w_i(M_j)|$  величины абсолютной погрешности  $i$ -й компоненты вектора скорости обобщенного и  $R_\nu$ -обобщенного решений в узле  $M_j$ , принадлежащем  $\Omega$  соответственно. В табл. 5, 6 представлены результаты подходов с точки зрения количества узлов (доля от их общего числа), в которых погрешность не превосходит заданные  $\Xi_n$ ,  $d_i^G(M_j) \leq \Xi_n$  и  $d_i^{R\nu}(M_j) \leq \Xi_n$ . На рис. 1–3 показано распределение узлов в  $\Omega$ . Погрешность весового МКЭ сосредоточена в окрестности входящего угла  $\omega$  и не распространяется во внутреннюю часть  $\Omega$ , где решение обладает гладкостью в отличие от классического МКЭ.

## Заключение

Разработан численный метод решения стационарных нелинейных уравнений Навье–Стокса (1)–(3) в конвективной форме в многоугольной области  $\Omega$  с входящим углом больше  $\pi$  с граничными условиями Дирихле на его сторонах. Известно, что погрешность численного метода для задач с такой особенностью зависит от сингулярной составляющей решения, но не зависит от его регулярной составляющей [25]. Поэтому рассмотрена тестовая задача с аналитическим решением (31)–(33) [38]. Поскольку решение (1)–(3) (вектор-скоростей) не принадлежит  $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ , приближенное решение по классическому МКЭ сходится к точному решению (1)–(3) в норме  $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$  существенно медленнее (по порядку относительно  $h$ ), чем в выпуклых областях, для которых поря-

док сходимости равен единице. Это является следствием того, что решение сингулярно в окрестности входящего угла. Порядок сходимости уменьшается с увеличением значения  $\omega$  (см. табл. 1). Погрешность, возникающая в окрестности точки сингулярности, распространяется во внутреннюю часть области (см. рис. 1–3, табл. 5). Предложенный весовой МКЭ устраняет эти неудобства и приводит к следующим выводам.

- Приближенное  $R_\nu$ -обобщенное решение сходится к точному решению нелинейной задачи (1)–(3) со скоростью  $\mathcal{O}(h)$  для всех величин входящего угла  $\omega$  в норме пространства  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)$  (см. табл. 2–4).
- Оптимальные величины параметров  $\nu$  и  $\delta$  в определении  $R_\nu$ -обобщенного решения не зависят от величины входящего угла  $\omega$ , при этом  $\nu \sim 2$  и  $\delta \sim h$ , а  $\nu^\diamond$  и  $\mu^\diamond$  — показатели весовой функции построенного весового МКЭ, они принимают равные отрицательные значения и уменьшаются с ростом величины входящего угла  $\omega$ .
- Метод прост в реализации и позволяет находить с необходимой точностью решение в окрестности  $\omega$  и не позволяет погрешности распространяться во внутреннюю часть области (см. табл. 6 и рис. 1–3). Порядок сходимости достигается без геометрического сгущения сетки в окрестности точки сингулярности.

На основании предложенного весового МКЭ и определения  $R_\nu$ -обобщенного решения можно построить тело оптимальных параметров (ТОП) для задачи (1)–(3) в переменных  $(\delta, \nu, \nu^\diamond)$  в зависимости от величины входящего угла  $\omega$ . В том смысле, что, взяв любую точку из построенного ТОП, мы получим гарантированный результат, т. е. отличающийся от ошибки наилучшего приближения на малую величину. Например, такой ТОП построен для задачи теории упругости с трещиной [25]. Знание ТОП позволит создать промышленные программные комплексы, основанные на предложенном весовом МКЭ. Отметим, что рассмотренный подход достигает первого порядка точности и при смене типа граничных условий в точке сингулярности (условия Дирихле – Неймана). Это продемонстрировано для задачи теории упругости в [39], в то время как классический МКЭ теряет свой порядок сходимости вдвое по сравнению со случаями, когда на сторонах входящего угла заданы условия Дирихле – Дирихле или Неймана – Неймана [33].

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00039, <https://rscf.ru/project/21-11-00039/>.

## Список литературы

- [1] **Blum H.** The influence of reentrant corners in the numerical approximation of viscous flow problems. Proceedings of the Fifth GAMM-Seminar, Kiel, January 20–22, 1989. Numerical Treatment of the Navier–Stokes Equations. 1990; (30):37–46. DOI:10.1007/978-3-663-14004-7-4. Available at: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-663-14004-7\\_4](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-663-14004-7_4).
- [2] **Cockburn B., Kanschat G., Schötzau D., Schwab C.** Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. SIAM Journal of Numerical Analysis. 2002; 40(1):319–343. DOI:10.1137/S0036142900380121.
- [3] **Schötzau D., Wihler T.** Exponential convergence of mixed hp-DGFEM for Stokes flow in polygons. Numerische Mathematik. 2003; (96):339–361. DOI:10.1007/s00211-003-0478-5.
- [4] **Kim H.H., Chung E., Lee C.S.** A staggered discontinuous Galerkin method for the Stokes system. SIAM Journal of Numerical Analysis. 2013; 51(6):3327–3350. DOI:10.1137/120896037.

- [5] **Hou Y., Han Y., Wen J.** An equal-order hybridized discontinuous Galerkin method with a small pressure penalty parameter for the Stokes equations. *Computers and Mathematics with Applications*. 2021; 93(1):58–65. DOI:10.1016/j.camwa.2021.03.031.
- [6] **Zhang F., Cheng J., Liu T.** A reconstructed discontinuous Galerkin method for incompressible flows on arbitrary grids. *Journal of Computational Physics*. 2020; (418):109580. DOI:10.1016/j.jcp.2020.109580.
- [7] **Da Veiga L.B., Brezzi F., Cangiani A., Manzini G., Marini L.D., Russo A.** Basic principles of virtual element methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2013; 23(1):199–214. DOI:10.1142/S0218202512500492.
- [8] **Lipnikov K., Manzini G., Shashkov M.** Mimetic finite difference method. *Journal of Computational Physics*. 2013; (257):1163–1227. DOI:10.1016/j.jcp.2013.07.031.
- [9] **Antonietti P.F., Da Veiga L.B., Mora D., Verani M.** A stream virtual element formulation of the Stokes problem on polygonal meshes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2014; 52(1):386–404. DOI:10.1137/13091141X.
- [10] **Da Veiga L.B., Lovadina C., Vacca G.** Divergence free virtual elements for the Stokes problem on polygonal meshes. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2017; 51(2):509–535. DOI:10.1051/m2an/2016032.
- [11] **Wang G., Mu L., Wang Y., He Y.** A pressure-robust virtual element method for the Stokes problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2021; (382):113879. DOI:10.1016/j.cma.2021.113879.
- [12] **John L., Pustejovska P., Wohlmuth B., Rude U.** Energy-corrected finite element methods for the Stokes system. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2017; (37):687–729. DOI:10.1093/imanum/drw008.
- [13] **Lubuma J.M.-S., Patidar K.C.** Towards the implementation of the singular function method for singular perturbation problems. *Applied Mathematics and Computation*. 2009; (209):68–74. DOI:10.1016/j.amc.2008.06.026.
- [14] **Jang D.K., Pyo J.H.** Algorithms to apply finite element dual singular function method for the Stokes equations including singularities. *Journal of Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*. 2019; (23):115–138. DOI:10.12941/jksiam.2019.23.115.
- [15] **Choi H.J., Kweon J.R.** A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2016; (292):342–362. DOI:10.1016/j.cam.2015.07.006.
- [16] **Al Salem A., Chorfi N.** Solving the Stokes problem in a domain with corners by the mortar spectral element method. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2016; (337):1–16.
- [17] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2018; (341):144–156. DOI:10.1016/j.cam.2018.04.014.
- [18] **Rukavishnikov A.V.** A numerical approach for solving one nonlinear problem of hydrodynamics in a non-convex polygonal domain. *Computational Continuum Mechanics*. 2022; 15(1):19–30. DOI:10.7242/1999-6691/2022.15.1.2.
- [19] **Gresho P.M., Sani R.L.** Incompressible flow and the finite element method. Volume 2: isothermal laminar flow. N.Y.: Wiley; 2000: 624.
- [20] **Olshanskii M.A., Reusken A.** A Grad–Div stabilization for Stokes equations. *Mathematics of Computation*. 2004; (73):1699–1718. DOI:10.1090/S0025-5718-0301629-6.
- [21] **Rukavishnikov V.A.** Differential properties of an  $R_\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem. *Soviet Mathematics Doklady*. 1990; (40):653–655.

- 
- [22] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Existence and uniqueness of an  $R_\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem for the Lamé system with a corner singularity. *Differential Equations*. 2019; 55(6):832–840. DOI:10.1134/S0012266119060107.
- [23] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Error estimate FEM for the Nikol'skij–Lizorkin problem with degeneracy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2022; (403):113841. DOI:10.1016/j.cam.2021.113841.
- [24] **Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O., Rukavishnikova E.I.** Weighted finite element method for elasticity problem with a crack. *Computers and Structures*. 2021; (243):106400. DOI:10.1016/j.compstruc.2020.106400.
- [25] **Rukavishnikov V.A.** Body of optimal parameters in the weighted finite element method for the crack problem. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2021; 7(4):2159–2170. DOI:10.22055/JACM.2021.38041.3142.
- [26] **Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P.** Approximate resolving equations of mathematical model of a curved thin-walled cylinder. *Applied Mathematics and Computation*. 2022; (422):126961. DOI:10.1016/j.amc.2022.126961.
- [27] **Elman H.C., Silvester D.J., Wathen A.J.** *Finite elements and fast iterative solvers: With applications in incompressible fluid dynamics*. Oxford: Oxford University Press; 2005: 395.
- [28] **Girault V., Raviart P.A.** *Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms*. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag; 1986: 374.
- [29] **Boffi D., Brezzi F., Fortin M.** *Mixed finite element methods and applications*. Berlin: Springer; 2013: 685. DOI:10.1007/978-3-642-36519-5.
- [30] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** On the existence and uniqueness of an  $R_\nu$ -generalized solution to the Stokes problem with corner singularity. *Mathematics*. 2022; 10(10):1752. DOI:10.3390/math10101752.
- [31] **Rukavishnikov A.V., Rukavishnikov V.A.** New numerical approach for the steady-state Navier–Stokes equations with corner singularity. *International Journal of Computational Methods*. 2022; (19):2250012. DOI:10.1142/S0219876222500128.
- [32] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** On the properties of operators of the Stokes problem with corner singularity in nonsymmetric variational formulation. *Mathematics*. 2022; 10(6):889. DOI:10.3390/math10060889.
- [33] **Ciarlet P.** *The finite element method for elliptic problems*. Amsterdam: North-Holland; 1978: 529.
- [34] **Qin J.** On the convergence of some low order mixed finite element for incompressible fluids. PhD thesis. Pennsylvania: Pennsylvania State University; 1994: 104.
- [35] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** New numerical method for the rotation form of the Oseen problem with corner singularity. *Symmetry*. 2019; 11(1):54. DOI:10.3390/sym11010054.
- [36] **Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T.** Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1997; (34):1072–1092. DOI:10.1137/S0036142994273343.
- [37] **Saad Y.** *Iterative methods for sparse linear systems*. Minneapolis: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2003: 547.
- [38] **Verfürth R.** *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Chichester-Stuttgart: Wiley; 1996: 134.
- [39] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Weighted finite-element method for Elasticity problems with singularity. Finite element method. Simulations, numerical analysis and solution techniques, eds. Pacurar Razvan. London: IntechOpen Limited; 2018; (341):295–311.
-

**On the optimal set of parameters for an approximate method for solving stationary nonlinear Navier – Stokes equations with singularity**

RUKAVISHNIKOV ALEXEY V.

Computing Center of the FEB RAS, 680000, Khabarovsk, Russia

Corresponding author: Rukavishnikov Alexey V., e-mail: 78321a@mail.ru

Received June 25, 2022, revised July 27, 2022, accepted August 11, 2022.

**Abstract**

The purpose of this paper is finding the optimal set of parameters for the constructed approximate method for solving the stationary Navier – Stokes equations. The search for a solution to a nonlinear problem is reduced to a sequence of approximate linear problems using values from previous iterations in the nonlinear convective term. The peculiarity of the problem lies in the fact that the computational domain is a non-convex polygon with a re-entrant angle, the vertex of which belongs to the boundary (singularity point). Using classical approximate methods, the error arising in the vicinity of the singularity point propagates into the inner part of the domain, where the solution has sufficient smoothness. In this case, the order of convergence of the approximate solution to the exact one is significantly less than for convex regions. The proposed numerical method overcomes these difficulties. It is based on two ideas, namely, the introduction into the variational formulation of problems a weight function to some degree and special basis functions.

In the course of numerical experiments, a set of optimal parameters of the method was determined. The order of convergence of the approximate solution to the exact one of the nonlinear problem is the same for angles more than  $\pi$  and significantly greater than those which use classical approaches. Part of the optimal set of free parameters of the proposed method does not depend on the value of the re-entrant angle. The optimal convergence rate is achieved without using a mesh refinement in the vicinity of the singularity point.

*Keywords:* nonlinear Navier – Stokes equations, singularity, finite element method.

*Citation:* Rukavishnikov A.V. On the optimal set of parameters for an approximate method for solving stationary nonlinear Navier – Stokes equations with singularity. Computational Technologies. 2022; 27(6):70–87. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.007. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The reported study was supported by Russian Science Foundation, project No. 21-11-00039, <https://rscf.ru/en/project/21-11-00039/>.

**References**

1. **Blum H.** The influence of reentrant corners in the numerical approximation of viscous flow problems. Proceedings of the Fifth GAMM-Seminar, Kiel, January 20–22, 1989. Numerical Treatment of the Navier – Stokes Equations. 1990; (30):37–46. DOI:110.1007/978-3-663-14004-7-4. Available at: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-663-14004-7\\_4](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-663-14004-7_4).
2. **Cockburn B., Kanschat G., Schötzau D., Schwab C.** Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. SIAM Journal of Numerical Analysis. 2002; 40(1):319–343. DOI:10.1137/S0036142900380121.
3. **Schötzau D., Wihler T.** Exponential convergence of mixed hp-DGFEM for Stokes flow in polygons. Numerische Mathematik. 2003; (96):339–361. DOI:10.1007/s00211-003-0478-5.
4. **Kim H.H., Chung E., Lee C.S.** A staggered discontinuous Galerkin method for the Stokes system. SIAM Journal of Numerical Analysis. 2013; 51(6):3327–3350. DOI:10.1137/120896037.



5. **Hou Y., Han Y., Wen J.** An equal-order hybridized discontinuous Galerkin method with a small pressure penalty parameter for the Stokes equations. *Computers and Mathematics with Applications*. 2021; 93(1):58–65. DOI:10.1016/j.camwa.2021.03.031.
6. **Zhang F., Cheng J., Liu T.** A reconstructed discontinuous Galerkin method for incompressible flows on arbitrary grids. *Journal of Computational Physics*. 2020; (418):109580. DOI:10.1016/j.jcp.2020.109580.
7. **Da Veiga L.B., Brezzi F., Cangiani A., Manzini G., Marini L.D., Russo A.** Basic principles of virtual element methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2013; 23(1):199–214. DOI:10.1142/S0218202512500492.
8. **Lipnikov K., Manzini G., Shashkov M.** Mimetic finite difference method. *Journal of Computational Physics*. 2013; (257):1163–1227. DOI:10.1016/j.jcp.2013.07.031.
9. **Antonietti P.F., Da Veiga L.B., Mora D., Verani M.** A stream virtual element formulation of the Stokes problem on polygonal meshes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2014; 52(1):386–404. DOI:10.1137/13091141X.
10. **Da Veiga L.B., Lovadina C., Vacca G.** Divergence free virtual elements for the Stokes problem on polygonal meshes. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2017; 51(2):509–535. DOI:10.1051/m2an/2016032.
11. **Wang G., Mu L., Wang Y., He Y.** A pressure-robust virtual element method for the Stokes problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2021; (382):113879. DOI:10.1016/j.cma.2021.113879.
12. **John L., Pustejovska P., Wohlmuth B., Rude U.** Energy-corrected finite element methods for the Stokes system. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2017; (37):687–729. DOI:10.1093/imanum/drw008.
13. **Lubuma J.M.-S., Patidar K.C.** Towards the implementation of the singular function method for singular perturbation problems. *Applied Mathematics and Computation*. 2009; (209):68–74. DOI:10.1016/j.amc.2008.06.026.
14. **Jang D.K., Pyo J.H.** Algorithms to apply finite element dual singular function method for the Stokes equations including singularities. *Journal of Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*. 2019; (23):115–138. DOI:10.12941/jksiam.2019.23.115.
15. **Choi H.J., Kweon J.R.** A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2016; (292):342–362. DOI:10.1016/j.cam.2015.07.006.
16. **Al Salem A., Chorfi N.** Solving the Stokes problem in a domain with corners by the mortar spectral element method. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2016; (337):1–16.
17. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2018; (341):144–156. DOI:10.1016/j.cam.2018.04.014.
18. **Rukavishnikov A.V.** A numerical approach for solving one nonlinear problem of hydrodynamics in a non-convex polygonal domain. *Computational Continuum Mechanics*. 2022; 15(1):19–30. DOI:10.7242/1999-6691/2022.15.1.2.
19. **Gresho P.M., Sani R.L.** Incompressible flow and the finite element method. Volume 2: isothermal laminar flow. N.Y.: Wiley; 2000: 624.
20. **Olshanskii M.A., Reusken A.** A Grad–Div stabilization for Stokes equations. *Mathematics of Computation*. 2004; (73):1699–1718. DOI:10.1090/S0025-5718-0301629-6.
21. **Rukavishnikov V.A.** Differential properties of an  $R_\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem. *Soviet Mathematics Doklady*. 1990; (40):653–655.
22. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Existence and uniqueness of an  $R_\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem for the Lamé system with a corner singularity. *Differential Equations*. 2019; 55(6):832–840. DOI:10.1134/S0012266119060107.
23. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Error estimate FEM for the Nikol’skij–Lizorkin problem with degeneracy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2022; (403):113841. DOI:10.1016/j.cam.2021.113841.
24. **Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O., Rukavishnikova E.I.** Weighted finite element method for elasticity problem with a crack. *Computers and Structures*. 2021; (243):106400. DOI:10.1016/j.compstruc.2020.106400.
25. **Rukavishnikov V.A.** Body of optimal parameters in the weighted finite element method for

- the crack problem. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2021; 7(4):2159–2170. DOI:10.22055/JACM.2021.38041.3142.
26. **Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P.** Approximate resolving equations of mathematical model of a curved thin-walled cylinder. *Applied Mathematics and Computation*. 2022; (422):126961. DOI:10.1016/j.amc.2022.126961.
  27. **Elman H.C., Silvester D.J., Wathen A.J.** Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics. Oxford: Oxford University Press; 2005: 395.
  28. **Girault V., Raviart P.A.** Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag; 1986: 374.
  29. **Boffi D., Brezzi F., Fortin M.** Mixed finite element methods and applications. Berlin: Springer; 2013: 685. DOI:10.1007/978-3-642-36519-5.
  30. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** On the existence and uniqueness of an  $R_\nu$ -generalized solution to the Stokes problem with corner singularity. *Mathematics*. 2022; 10(10):1752. DOI:10.3390/math10101752.
  31. **Rukavishnikov A.V., Rukavishnikov V.A.** New numerical approach for the steady-state Navier–Stokes equations with corner singularity. *International Journal of Computational Methods*. 2022; (19):2250012. DOI:10.1142/S0219876222500128.
  32. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** On the properties of operators of the Stokes problem with corner singularity in nonsymmetric variational formulation. *Mathematics*. 2022; 10(6):889. DOI:10.3390/math10060889.
  33. **Ciarlet P.** The finite element method for elliptic problems. Amsterdam: North-Holland; 1978: 529.
  34. **Qin J.** On the convergence of some low order mixed finite element for incompressible fluids. PhD thesis. Pennsylvania: Pennsylvania State University; 1994: 104.
  35. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** New numerical method for the rotation form of the Oseen problem with corner singularity. *Symmetry*. 2019; 11(1):54. DOI:10.3390/sym11010054.
  36. **Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T.** Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1997; (34):1072–1092. DOI:10.1137/S0036142994273343.
  37. **Saad Y.** Iterative methods for sparse linear systems. Minneapolis: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2003: 547.
  38. **Verfürth R.** A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Chichester-Stuttgart: Wiley; 1996: 134.
  39. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Weighted finite-element method for Elasticity problems with singularity. Finite element method. Simulations, numerical analysis and solution techniques, eds. Pacurar Razvan. London: IntechOpen Limited; 2018; (341):295–311.